Задача 1. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий утроилось в течение 5 часов. Найти зависимость числа бактерий от времени.

Решение. Обозначим количество бактерий в момент времени t через x, тогда  - скорость размножения бактерий.

По условию задачи  - уравнение с разделяющимися переменными.



Потенцируем последнее выражение и получаем общее решение нашего дифференциального уравнения.



Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям

При t=0, x=x0  -частное решение дифференциального уравнения.

Чтобы найти искомую зависимость, определим коэффициент пропорциональности k. По условию задачи известно, что через 5 часов  .

Таким образом



Прологарифмируем последнее выражение



Окончательно получаем 

Задача 2. При прохождении света через вещество происходит ослабление интенсивности светового потока, вследствие превращения световой энергии в другие виды энергии, т.е. происходит поглощение света веществом. Найти закон поглощения, если известно, что ослабление интенсивности пропорционально толщине слоя и интенсивности падающего излучения.

Решение. Исходя из условия задачи, можно сразу написать дифференциальное уравнение

 ,

где dI -ослабление интенсивности при прохождении слоя толщиной dx.

k -коэффициент пропорциональности.

Знак минус показывает, что интенсивность падает по мере прохождения слоя.

Проинтегрируем наше уравнение, предварительно разделив переменные









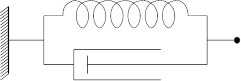
Исходя из того, что падающий на поверхность вещества свет имел интенсивность I=I0 ,при x=0, найдем частное решение





Итак, мы получили закон поглощения света веществом ( закон Бугера), где  
k -натуральный показатель поглощения.

Задача 3. Известно, что механические свойства биологических объектов изучаются с помощью вязкоупругих моделей (поршень - пружина). Одной из найболее распространенных является модель Кельвина - Фойхта, состоящая из параллельно соединенных пружины и поршня (см. рис.1).



*Рис. 4. Модель Кельвина - Фойхта*

Найти зависимость деформации от времени  , если к модели приложена постоянная нагрузка.

Решение. Согласно условию задачи  , и учитывая также, что при малых деформациях выполняется закон Гука, т.е.  , а механическое напряжение, возникающее в вязкой среде пропорционально скорости деформации, т.е.  , мы можем написать дифференциальное уравнение.

 , или 

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение от начального момента времени и нулевой деформации до текущих значений t и  , мы будем иметь сразу частное решение.





Потенцируя последнее выражение, получаем



Находим отсюда 



Как видно из полученной формулы, в рамках модели Кельвина - Фойхта деформация при постоянной нагрузке возрастает с течением времени. Это соответствует реальным материалам. Такое свойство материала названо текучестью.

Дифференциальные уравнения второго порядка используются во многих областях естествознания.

Остановимся на рассмотрении движения динамических систем вблизи положения равновесия, т.е. на колебаниях. При достаточно малых отклонениях от положения равновесия колебания бывают обычно гармоническими.

Ограничим наше рассмотрение только случаем свободных колебаний без учета сил трения и внешнего воздействия.

|  |
| --- |
|  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | C | |

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | L | |

               Примеры свободных колебаний в различных системах

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Во всех приведенных примерах сила, действующая на систему (шарик), выражается сложной функцией его отклонения от положения равновесия.  ,

где x – малое отклонение от положения равновесия, а  - точка устойчивого равновесия.

Сила f(x) в точке равновесия равна нулю, т. е. f(0)=0.

Обычно в реальных физических системах отличным от нуля бывает член  . Так как x=0 есть точка устойчивого равновесия, сила должна быть направлена к точке x=0. Это значит, что  .

Исходя из второго закона динамики, запишем уравнение движения для малых отклонений от положения равновесия.

 или  , где  .

Выражая ускорение a через вторую производную смещения x по времени, получаем 

Разделим обе части уравнения на массу m и обозначим  .

После проведенных преобразований получаем уравнение гармонических колебаний для механических систем .

 (\*)

Получим такое же уравнение для случая электромагнитных колебаний. Э.Д.С. индукции в колебательном контуре, имеет вид

 .

Учитывая, что  , снова приходим к дифференциальному уравнению второго порядка  . Разделим обе части уравнения на  и обозначим  .

Окончательно получаем для электромагнитных колебаний

 (\*\*)

Примечательно, что, несмотря на различную природу механических и электромагнитных колебаний, они описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями второго порядка, уравнениями гармонических колебаний. Разница лишь в том, что во втором уравнении мы вместо  (смещения) имеем дело с электрическим зарядом  , и стремление к равновесию - есть стремление восстановить нулевое значение заряда на конденсаторе.

Найдем решение уравнения гармонических колебаний. Составим характеристическое уравнение  .

Его корни мнимые и равны соответственно:



Следовательно, решением данного уравнения в случае механических колебаний функция будет выглядеть так:



 ,  - постоянные интегрирования.

После несложных преобразований можно упростить это выражение

 .

Аналогично, можно записать для электромагнитных колебаний



Здесь введенная ранее величина  - есть собственная циклическая частота колебаний,  (или  ) – амплитуда колебаний,  - начальная фаза.

На всех уровнях организации – от макромолекулярного до популяционного – в биологическихсистемах происходят незатухающие колебания их параметров: ферментативной активности, концентрации метаболитов, параметров, определяющих физиологическое состояние (пульс, смена сна и бодрствования и т.д.). Считается, что любая биологическая система не только может, но и должна быть колебательной. Вот почему колебательным процессам уделяется столь пристальное внимание.

Рассмотрим одну из задач прикладной механики, исследовав, и разрешив ее с помощью линейных дифференциальных уравнений.

Рис. 6.

Пусть, например, тело массой m, подвешено на пружине, жестко закрепленной одним концом (см. рис.6).

Как видно из рис.1 (положение I), вес тела уравновешивается упругой силой пружины, т.е.

F1 = mg

Если оттянуть пружину, то появятся еще две силы: F - восстанавливающая сила пружины, пропорциональная изменению длины пружины и Fсопр - сила сопротивления среды, пропорциональная скорости движения тела.

Равнодействующая сил, расположенных на одной прямой (положение II) определяется как их алгебраическая сумма :

R = F1 + F + Fсопр - mg

Исходя из того, что F1 = mg равнодействующая будет равна

R = F + Fсопр

По второму закону Ньютона

R = ma ;

Следовательно,

(1)

Силу F можно определить по закону Гука

F = - kx, (2)

где k - коэффициент жесткости пружины.

Сила Fсопр пропорциональна скорости движения и направлена противоположно ей:

Fсопр= - r v, (3)

, (4)

где r - коэффициент, характеризующий свойства среды оказывать сопротивление движению.

Подставив (2), (3) и (4) в выражение (1) имеем

;

Разделим обе части на m, и перенесем все члены в одну сторону, получим

(5)

Введем следующие обозначения:

,

Замечание. k и m - величины положительные, следовательно и k/m - тоже величина положительная, поэтому мы вправе обозначить ее квадратом некоторого числа.

Тогда выражение (5) будет иметь вид

или (6)

Итак, решение нашей задачи свелось к решению линейного однородного дифференциального уравнения.

Воспользуемся нашим алгоритмом решения.

1. Напишем характеристическое уравнение

2. Найдем корни этого уравнения

,

3. Запишем общее решение. Как мы знаем, общее решение зависит от того, какого вида получились у нас корни. Поэтому исследуем каждое решение в отдельности.

Допустим, что

1) b > w0, тогда корни действительные, отрицательные и решение имеет вид

Рис. 7 График, представляющий решение дифф. уравнения при k1 ¹ k2

Как видно, общее решение выражается через показательные функции. Следовательно, смещение x, при любых C1 и C2 асимптотически стремится к нулю, при t®¥. Графически это выглядит так(рис. 7)

В данном случае колебаний не будет, т.к. силы сопротивления велики по сравнению с коэффициентом жесткости пружины.

2) b = w0, тогда корни характеристического уравнения k1 = k2 = -b.

Рис. 8. График, представляющий решение дифф. уравнения при k1 = k2

Общее решение, как следует из теории, имеет вид

Здесь также смещение стремится к нулю при t®¥, однако не так быстро, как в предыдущем случае (благодаря наличию сомножителя C1 + C2t). Графически это можно представить следующим образом (см. рис.8)

3) b = 0, т.е. отсутствует сила сопротивления, уравнение (6) тогда примет вид

(7)

Дифференциальное уравнение (7) называется уравнением свободных колебаний. Характеристическое уравнение имеет вид ;

Общее решение (8)

Общее решение можно также записать в следующем виде:

x = A cos (w0t + j0) ,

Рис. 9. Гармонический колебательный процесс

заменив математические постоянные C1 и C2 величинами A и j0 , имеющими смысловую физическую нагрузку. Эти величины можно легко выразить через C1 и C2 следующим образом:

Итак, если отсутствуют силы сопротивления, мы получаем гармонический колебательный процесс, где

x - смещение колеблющейся точки от положения равновесия происходит по косинусоидальному закону. При этом w0 - есть круговая (циклическая) частота,

A - амплитуда, т.е. максимальное смещение точки от положения равновесия, j0 - начальная фаза.

4) b < w0, тогда корни характеристического уравнения комплексные

Обозначив , запишем корни уравнения в виде

k1 = - b + i w ; k2 = -b - i w

Тогда решение дифференциального уравнения

x = e -bt (C1 cos wt + C2 sin wt ).

Введя постоянные A0, j0, можно записать решение в виде

x = A0 e -bt cos(wt + j0).

Рис. 10. Затухающий колебательный процесс

Мы получили дифференциальные уравнения затухающих колебаний, где - круговая частота затухающих колебаний, b - коэффициент затухания. Кроме того мы получили зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени

A (t) = A0 e -bt

В результате данного анализа дифференциального уравнения, соответствующего конкретной задаче механических колебаний выяснили, что колебания будут гармоническими, если корни характеристического уравнения мнимые, или затухающими, если корни характеристического уравнения комплексные. В любом другом случае движения будут апериодическими.